

## THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 9

**Exercice 1.** *À faire après chaque cours !*

Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

**Exercice 2.** (facile) Soit  $G$  un groupe et fixons un nombre premier  $p$ . Montrez que  $G$  possède un unique  $p$ -sous-groupe de Sylow si et seulement si tous (et donc le seul) de ses  $p$ -sous-groupes de Sylow sont normaux.

**Exercice 3.** (facile) Soient  $p \neq q$  deux nombres premiers distincts et  $G$  un groupe fini d'ordre  $p^n q^m$ . Supposons que  $G$  possède un unique  $p$ -sous-groupe de Sylow  $P$ , ainsi qu'un unique  $q$ -sous-groupe de Sylow  $Q$ . Montrez que nous avons un isomorphisme de groupes  $G \cong P \times Q$ .

**Exercice 4.** (facile)

Soit  $\varphi : G \rightarrow H$  un homomorphisme surjectif des groupes. Si  $P \subseteq G$  est un  $p$ -sous-groupe de Sylow, montrez que  $\varphi(P) \subseteq H$  est un  $p$ -sous-groupe de Sylow de  $H$ .

**Exercice 5.** (moyen) Trouvez tous les 2-sous-groupes de Sylow de  $A_5$ .

**Exercice 6.** (moyen) Soit  $G$  un groupe fini et  $p$  un nombre premier. Soit  $s$  un entier positif tel que  $p^s \mid |G|$ . Montrez que  $G$  possède un sous-groupe d'ordre  $p^s$ .

**Exercice 7.** (moyen) *Tout  $p$ -sous-groupe est contenu dans un  $p$ -sous-groupe de Sylow.*

(1) Soit  $G$  un groupe fini et soit  $H \subseteq G$  un sous-groupe d'ordre  $p^k$  pour un nombre premier  $p$  et  $k > 0$ . Montrez que  $H$  est contenu dans un  $p$ -sous-groupe de Sylow de  $G$ .

**Indice :** Essayez d'utiliser l'idée de la preuve du deuxième théorème de Sylow dans les notes de cours.

(2) Supposons de plus que  $H$  soit un sous-groupe normal de  $G$  d'ordre  $p^k$ . Montrez que  $H$  est contenu dans tous les  $p$ -sous-groupes de Sylow de  $G$ .

**Exercice 8.** (moyen) Soit  $K$  un sous-groupe normal d'un groupe fini  $G$  et soit  $P$  un  $p$ -sous-groupe de Sylow de  $K$ . Montrez que  $G$  est engendré par  $K$  et  $N_G(P)$ .

**Exercice 9.** (difficile) Montrez qu'un groupe  $G$  d'ordre 48 n'est pas simple.

**Indice :** Les noyaux des homomorphismes de groupes sont normaux.